Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ANALYSE 1

Examen terminal, le 4 janvier 2017, 8h00-11h00

CORRIGE

Exercice 1. a. Faux, $2 \times \frac{1}{2} = 1$ mais $2 \neq 1$ et $\frac{1}{2} \neq 1$.

b. Faux, $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

c. Faux, la fonction $f(x) = 1/(x^2+1)$ fournit un contre-exemple.

d. Faux, la fonction f' ne possède pas nécessairement une fonction réciproque de sorte que $(f')^{-1}$ n'est même pas définie en général. Par exemple, si $D = E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$, la fonction f' est la fonction constante 1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne possède pas de réciproque.

Même si f' est une bijection, on n'a pas $(f^{-1})' = (f')^{-1}$. En effet, prenons $D = \mathbb{R}$, $E =]0, +\infty[$ et $f(x) = e^x$. On a $f' = f$, donc f' possède une réciproque à savoir la fonction ln. Autrement dit, on a $(f')^{-1} = \ln$. Par contre $(f^{-1})'(x) = \ln'(x) = 1/x$. On a bien $(f')^{-1} \neq (f^{-1})'$.

e. Vrai, comme $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. a. On calcule

$$\begin{aligned} f'(x) = 4\sin^3(x)\cos(x) - 4\cos^3(x)(-\sin(x)) = \\ 4\sin^3(x)\cos(x) + 4\cos^3(x)\sin(x) = 4\sin(x)\cos(x)(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \\ 4\sin(x)\cos(x) = 2\sin(2x). \end{aligned}$$

b. Les primitives de $2\sin(2x)$ sont $-\cos(2x) + c$, où c est une constante. Comme f est une primitive de f', on a donc

$$f(x) = -\cos(2x) + c$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = \sin^4(0) - \cos^4(0) = 0 - 1 = -1$ et $-\cos(2 \times 0) + c = -1 + c$, on a $-1 + c = -1$, c-à-d, $c = 0$. D'où $f(x) = -\cos(2x)$.

c. Oui, on peut simplifier

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^4(x) - \cos^4(x) = (\sin^2(x) + \cos^2(x))(\sin^2(x) - \cos^2(x)) = \\ \sin^2(x) - \cos^2(x) = -\cos(2x). \end{aligned}$$

Exercice 3. a. On calcule

$$f'(x) = \frac{-2\arctan(x)}{x^2+1} + \frac{-2}{x^2+1} = \frac{-2\arctan(x) - 2}{x^2+1}$$

b. On résoud $f'(a) = 0$. D'après le a, $f'(a) = 0$ si et seulement si $-2\arctan(a) - 2 = 0$, c-à-d, $\arctan(a) = -1$, ou encore $a = \tan(-1)$. La fonction f a donc un seul point critique à savoir $a = \tan(-1)$.

c. On calcule

$$f''(x) = \frac{\frac{-2}{x^2+1} \cdot (x^2+1) - (-2\arctan(x) - 2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2 + 4x\arctan(x) + 4x}{(x^2+1)^2}.$$

d. Comme $\arctan(a) = -1$, on a

$$f''(a) = \frac{-2 - 4a + 4a}{(a^2+1)^2} = \frac{-2}{(a^2+1)^2} < 0.$$

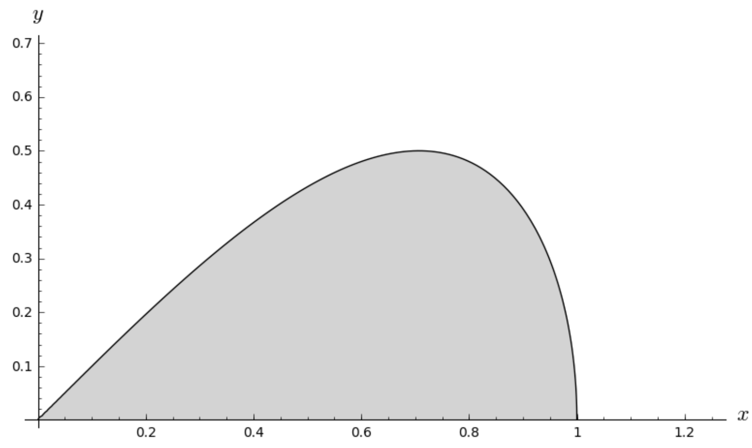
e. La fonction f prend donc un maximum local en $a = \tan(-1)$.

Exercice 4. On a

$$\int f(x)\,dx = \int x\arctan(x)\,dx = \int (\tfrac{1}{2}x^2)' \cdot \arctan(x)\,dx =$$
$$\tfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \arctan'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx =$$
$$\tfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \tfrac{1}{2}\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$\tfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\arctan(x) + c,$$

où c est une constante.

Exercice 5. a. Remarquons que le noeud de papillon est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. L'aire A est donc égale à 4 fois l'aire de la figure ci-dessous :



C'est l'aire sous le graphe d'une fonction positive f dont le domaine est l'intervalle $[0, 1]$ et qui satisfait

$$f(x)^2 = x^2(1 - x^2),$$

c-à-d,

$$f(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2} = |x|\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2}$$

car $x \in [0,1]$. Du coup, l'aire sous le graphe de la fonction f est

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

b. La fonction sin est bien une bijection dérivable de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$. Si $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$. Il vient

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot|\cos(t)|\cdot\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^2(t)\,dt$$

car $\cos(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Du coup,

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\tfrac{1}{3}\cos^3(\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos^3(0) = \tfrac{1}{3}.$$

c. D'après les a et b, $A = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Exercice 6. a. Si $f' = e^f$, on a $f'e^{-f} = 1$. En primitivant on obtient

$$-e^{-f} = x + c$$

où c est une constante. Du coup, $e^{-f} = -x - c$ et, en appliquant la fonction ln, on obtient

$$-f(x) = \ln(-x-c)$$

ou encore

$$f(x) = -\ln(-x-c)$$

où c est toujours une constante.

b. On applique la méthode de variation de constante : On pose

$$f(x) = -\ln(-x-c(x)),$$

où c est une fonction dérivable, et on suppose que f est solution de l'équation différentielle $f' - e^f - 1 = 0$. On a alors

$$0 = \frac{-1}{-x-c(x)}\cdot(-1-c'(x)) - \frac{1}{-x-c(x)} - 1 = \frac{c'(x)}{-x-c(x)} - 1.$$

D'où

$$c'(x) = -c(x) - x.$$

Les solutions de l'équation homogène $c' = -c$ sont $c(x) = be^{-x}$, où b est une constante. On résoud $c'(x) + c(x) + x = 0$ par la variation de constante :

$$0 = b'(x)e^{-x} - b(x)e^{-x} + b(x)e^{-x} + x = b'(x)e^{-x} + x.$$

D'où
$$b'(x) = -xe^x.$$
D'où
$$b(x) = \int -xe^x\, dx = \int (-x)(e^x)'\, dx = -xe^x + \int e^x\, dx = -xe^x + e^x + a,$$
où a est une constante. On en déduit que
$$c(x) = b(x)e^{-x} = -x + 1 + ae^{-x},$$
et
$$f(x) = -\ln(-x - c(x)) = -\ln(-1 - ae^{-x}).$$
c. Le domaine de la fonction f ci-dessus est l'ensemble des x tels que $-1-ae^{-x} > 0$. Or, cette dernière inégalité est équivalente à $x < \ln(-a)$. Le domaine de f est donc l'intervalle $]-\infty, \ln(-a)[$. L'unique solution de l'équation différentielle $f' = e^f + 1$ dont le domaine est $]-\infty, 0[$ est la fonction f pour laquelle $\ln(-a) = 0$, c-à-d, $a = -1$. La fonction demandée est donc
$$f(x) = -\ln(e^{-x} - 1).$$